

VARIABLES ALEATORIAS

Versión PDF

II-1120 Estadística para Ingeniería Industrial I

Steven García Goñi

steven.garciagoni@ucr.ac.cr

4 de marzo de 2026



Agenda

- Preguntas generadoras
- Variable aleatoria
 - Discreta
 - Continua
- Distribución de probabilidad
 - Discreta
 - Continua
- Esperanza y Varianza matemática



Preguntas generadoras

- ¿Qué es una variable aleatoria?
- ¿Para qué sirven las variables aleatorias?
- ¿Qué es un parámetro?
- ¿Qué es una función de masa/densidad?
- ¿Qué es una función de distribución acumulada?
- ¿Qué es la esperanza matemática?
- ¿Cuáles son las propiedades de la esperanza y varianza matemática?



Introducción

- El concepto de variable aleatoria permite pasar de los resultados recolectados en un experimento a la función numérica de los resultados.
- Existen dos tipos de variables aleatorias:
 - Discretas
 - Continuas
- Una distribución de probabilidad proporciona toda la gama de valores que se pueden presentar en un experimento cuyos resultados se encuentran sujetos al azar.
- Es similar a una distribución de frecuencias relativas, pero en lugar de describir, busca asignar probabilidades a los posibles resultados.



¿Para qué estudiarlas?

- Prácticamente **todo a nuestro alrededor tiene un comportamiento “aleatorio”**.
- Por ejemplo:
 - ¿Cuántos lanzamientos se necesitan para obtener “corona” en una moneda?
 - ¿Cuánto tiempo debe esperar a que llegue el ascensor/bus/Uber?
- Conectado con la práctica de la ingeniería: control de calidad, tiempos de espera, inventarios, confiabilidad... cada decisión bajo incertidumbre implica una variable aleatoria, aun cuando esta no se mencione explícitamente.
- La teoría de la probabilidad es la herramienta matemática que nos permite analizar los eventos aleatorios de manera estructurada.



Variable aleatoria

- Es una función $X : S \rightarrow \mathbb{R}$, aun cuando lleve el nombre de **variable**, que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.
 - Cuyo dominio es el espacio muestral y cuyo codominio es el conjunto de números reales.
 - Tampoco es **aleatoria**, pues está completamente definida por la función.
- La semántica detrás del concepto **variable aleatoria** viene arraigada a la idea clásica de que depende del resultado de un experimento que es **aleatorio**.
- | La aleatoriedad no está en la función, sino en el resultado del experimento.



Variable aleatoria

- Las variables aleatorias pueden ser valores “reales”, como la longitud de un borrador, el espacio entre máquinas en una fábrica; o “ficticias”, como la codificación de 1 como bueno y 0 como malo en un producto.
- Es un **modelo matemático** que describe o intenta describir los resultados, usualmente de manera numérica, de un evento cuyos resultados se deben al azar.
- Es cualquier regla que asocia un número con cada resultado en S .



Variable aleatoria

Discreta

- Cuando la variable puede tomar un **número finito** de posibilidades, o una serie interminable con tantos elementos como **números enteros** existen.
- En simple:
 - Cuando sí se puede contar su conjunto de valores posibles.
- Ejemplo:
 - Artículos defectuosos
 - Número de accidentes
 - Cantidad de monedas en una cartera

Continua

- Cuando puede tomar un número infinito (no numerable) de posibilidades, igual al número en un segmento de recta.
- En simple:
 - Cuando puede tomar valores en una escala **continua**.
- Ejemplo:
 - Peso
 - Altura
 - Temperatura



Anotación importante

- Esta aproximación práctica es generalmente válida, no obstante, hay aplicaciones en las que el instrumento de medición, aún cuando mida una variable continua, por su resolución, produce resultados discretos.
- Por ejemplo, medir un proceso que produce resultados muy consistentes y precisos con un instrumento “incorrecto” va a generar una variable discreta:
 - El peso de las nueces en una ensalada que podemos comprar en un supermercado debe ser de 50 g.
 - Medir ese peso con una balanza que marca cada 5 g va a producir resultados discretos.
 - Medirlo con una balanza que marca cada 0.1 g produce resultados más cercanos a una variable continua.
- A menudo, lo “continuo” responde a un modelo “idealizado”. El carácter discreto o continuo no es una propiedad física del fenómeno, sino del modelo que se busca construir.



Una simplificación de los términos

Variables discretas

- Si los resultados son conteos
 - Valor del lanzamiento de un dado
 - Valor del lanzamiento de una moneda
 - Cantidad de personas en una fila
 - Número de intentos de una persona para obtener la licencia de conducir

Variables continuas

- Si los resultados son mediciones
 - Tiempo de supervivencia de un electrodoméstico
 - Medición del peso en una balanza
 - Energía producida por una turbina eólica
 - Distancia recorrida por un avión de papel



Distribución de probabilidad



Concepto

- Es la lista de todos los resultados de un experimento y la probabilidad asociada a cada uno de ellos.
 - La probabilidad de un resultado particular se encuentra entre 0 y 1, ambos inclusive.
 - Los resultados son eventos mutuamente excluyentes.
 - La lista es exhaustiva
 - Es decir, la suma de las probabilidades es igual a 1.0



Notación importante

- Función de masa (*pmf*) /densidad (*pdf*) $\rightarrow f(x)$
- Función de distribución acumulada (*cdf*) $\rightarrow F(x)$
- Esperanza matemática $\rightarrow E(x)$
- Varianza matemática $\rightarrow V(x)$
- Recuerde además: en el contexto de las distribuciones de probabilidad, los parámetros se emplean para describir el comportamiento de los datos. Nosotros buscamos aproximar esos parámetros a partir de **muestreo**, es decir, mediante estimadores



Importante



- Ojo, son las **distribuciones las que se ajustan a los datos** y nunca los datos a las distribuciones.
 - Cuide el vocabulario técnico correcto.
- Entonces, si una distribución cualquiera NO se ajusta a un conjunto de datos, **es la distribución la que no "sirve"** como modelo, no los datos.
 - Nota: Esto bajo la consideración de que la forma en que se recolectaron los datos y la cantidad de los mismos son adecuados.
- ¿Podemos suponer que el pie (**datos**) está mal? ¿O escogimos mal el zapato (**distribución**)?



Ejemplo

- Vamos a generar una distribución de probabilidad (recuerde que es similar a una **dis-tribución de frecuencias relativas**).
- Se supone que la probabilidad de obtener “escudo” en una moneda es 0.50.
- Todas las personas presentes:
 - Lancen una moneda 3 veces, ¿cuántos escudos obtuvieron?
- Complete la tabla del siguiente slide en conjunto con la persona docente y las demás personas estudiantes.
- Complete también el gráfico, dibujando los resultados obtenidos en el cuadro.

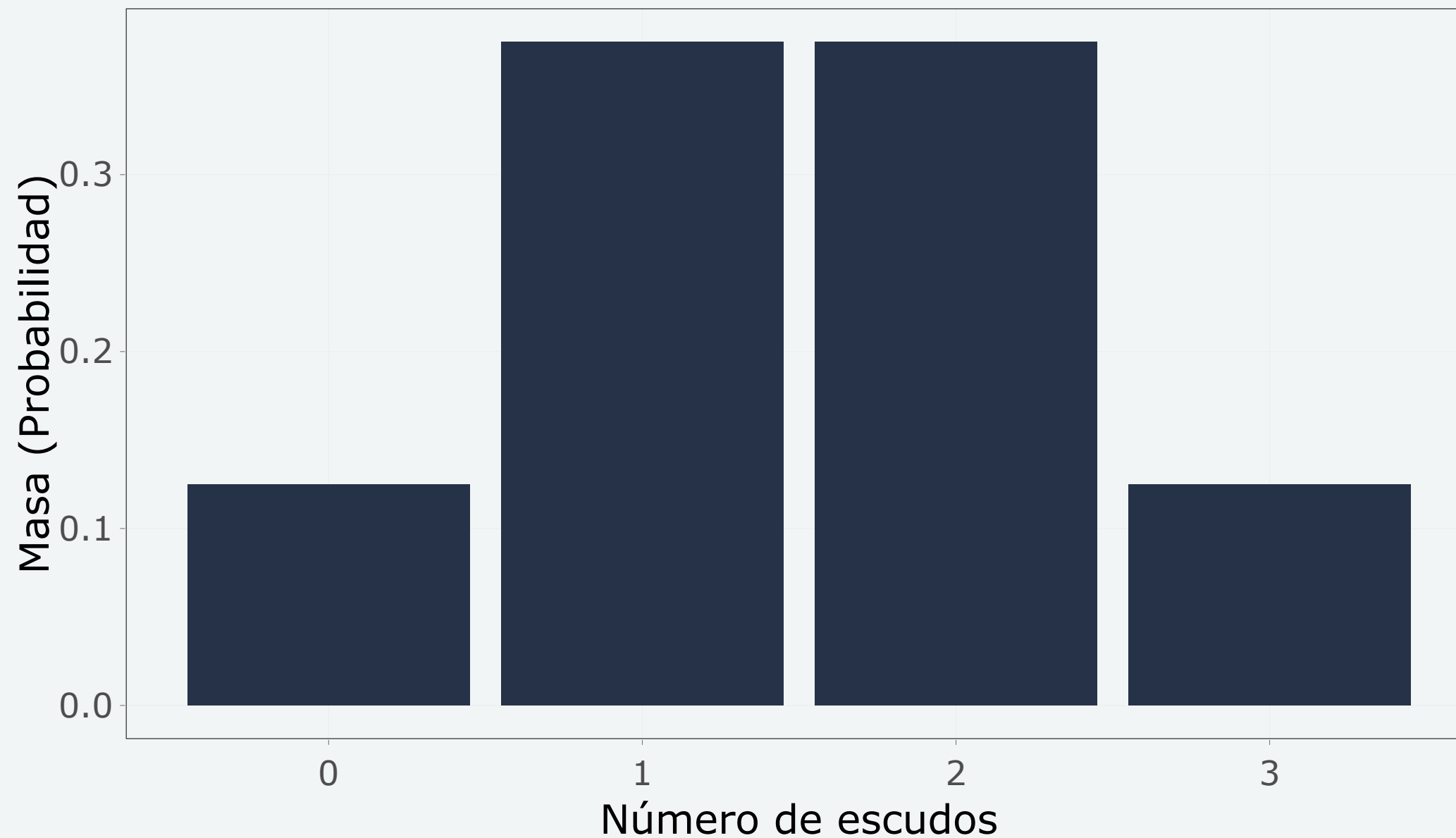


Ejemplo

Número de escudos x_i	Probabilidad (teórica)	Cantidad de estudiantes que sacaron x_i escudos	Probabilidad (práctica)
0	0.125		
1	0.375		
2	0.375		
3	0.125		



Ejemplo



- Si la probabilidad práctica NO se parece o se asemeja a la probabilidad teórica, puede ser que le falte tamaño de muestra.
 - Es decir, la cantidad de estudiantes no es suficiente. Esto se asocia con la ley de los grandes números que se estudiará posteriormente.



Ejemplo

- Finalmente, el ejemplo desarrollado es una distribución Binomial (tema de la clase de distribuciones discretas). No se necesita lanzar x_∞ para obtener las probabilidades, solo necesita conocer o estimar el parámetro que describe esta distribución, en este caso n : cantidad de lanzamientos, que fueron 3 y p : probabilidad, que es 0.5.

- $$P(x_i) = \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$$

- Es decir:

$$— P(0) = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0.5^0 (1-0.5)^{3-0} = 0.125$$

- Resuelva para 1, 2, 3



Distribución de probabilidad discreta

- Es una lista mutuamente excluyente de todos los posibles valores numéricos para una variable aleatoria tal que una probabilidad de ocurrencia específica se asocia con cada resultado.
- Cuando la distribución es discreta, la función suele recibir el nombre de **función de masa**.
- La función de masa $f(x)$:
 - Es estrictamente no negativa $f(x) \geq 0$
 - La suma de las probabilidades de todos sus eventos es igual a 1 $\sum_{i=1}^n f(x) = 1$
 - La probabilidad de un evento x es igual al resultado de la función de masa $P(X = x_i) = f(x_i)$

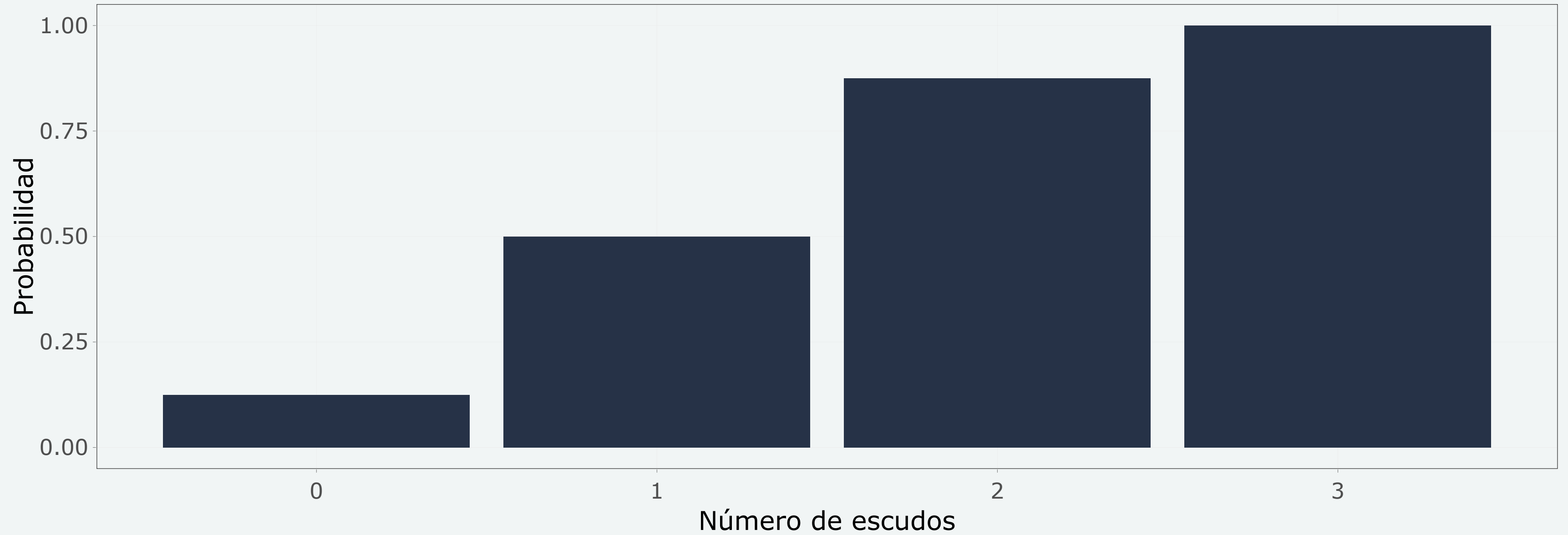


Distribución de probabilidad discreta

- La función de distribución acumulada $F(x)$:
 - Es la sumatoria de la función de masa desde el valor mínimo hasta un valor particular de interés
$$F(X_i) = P(X \leq x_i) = \sum f(x)$$
 - Por ejemplo, $F(1) = f(0) + f(1)$
 - Resuelva $F(1)$ para el ejemplo de las monedas
 - Note que $F(x)$ es siempre NO decreciente.



Sigamos el ejemplo



Distribución de probabilidad continua

- Por definición, tiene una probabilidad de 0 (cero) de adoptar exactamente cualquiera de sus valores. Por tanto, su distribución no se puede representar, fácilmente, de forma tabular directa.
 - Al ver la fórmula más adelante se comprenderá mejor. Pero requiere conocimientos básicos de cálculo integral.
- En este caso suele recibir el nombre de **función de densidad**.
- La función de densidad $f(x)$:
 - Es no negativa $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$
 - La integral en exactamente un punto es siempre 0, por eso la definición anterior.
 - La integral de $-\infty$ (o el valor de inicio) hasta ∞ o el valor final es igual a 1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
 - La probabilidad se obtiene por intervalos $F(x) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$



Distribución de probabilidad continua

- La función de distribución acumulada $F(x)$:
 - Es la integral de la función de densidad desde el valor mínimo hasta un valor particular de interés
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$
 - $F(x)$ es siempre no decreciente



Esperanza y varianza matemática



Esperanza matemática

- La media μ de una distribución de probabilidad recibe el nombre de valor esperado (Esperanza matemática).
- Se trata de un promedio ponderado en el que los posibles valores de una variable aleatoria se ponderan con sus correspondientes probabilidades de ocurrir.
- $E(x) = \mu = \sum x_i \cdot f(x_i)$



Varianza matemática

- Como se sabe del tema de descripción de datos, la media constituye un valor típico para resumir datos. Sin embargo, no describe el grado de dispersión (variación o variabilidad) en una distribución. La varianza sí lo hace. Por lo que hay una medida del valor esperado de esta variación.
- $V(x) = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$



Continuemos el ejemplo de las monedas

- Verifique que el valor de
 - $E(x) = 1.5$
 - $V(x) = 0.75$



Para distribuciones continuas

- $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)$
- $V(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)$



Propiedades de la esperanza

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(b) = b$$

$$\mathbb{E}(X \pm Y) = \mathbb{E}(X) \pm \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$



Propiedades de la varianza

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

$$V(aX) = a^2V(X)$$

$$V(b) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + \text{Var}(Y) \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \quad \text{si } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$



Ejemplos finales

- Se muestran dos ejercicios tomados del material de la Inga. Valentina Campos Aguilar.



Ejemplo 01

- Una empresa de confección de telas produce en promedio 580 metros al día y el promedio de manchas por cada metro de tela es de 0.75. Estas variables se consideran independientes. Obtenga el promedio de manchas por día.
- Resuelva con las propiedades anteriores. La respuesta correcta es $443 \frac{\text{manchas}}{\text{día}}$



Ejemplo 02

- Una persona compra un “six pack” de cervezas de 350 mL, se sabe por el fabricante que la varianza de cada lata es de 9 mL. ¿Cuál es la varianza del “six pack”?
- Resuelva con las propiedades anteriores. La respuesta correcta es 54 mL^2 .
- Si en lugar de un six pack la persona compra una sola lata gigante que es exactamente 6 veces el contenido de una pequeña:
- Resuelva con las propiedades anteriores. La respuesta correcta es 324 mL^2 .



Actividad lúdica (Enlace)

Comprobación de conocimientos

VARIABLES ALEATORIAS

Estadística para ingeniería



Bibliografía

- Walpole, R.; Myers, R.; Myers, S. y Ye, K. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias (9na Edición).
 - Capítulo 3 y 4
- Lind, D.; Marchal, W. y Watchen, S. Estadística aplicada a los Negocios y la Economía (15va Edición).
 - Capítulo 6
- Devore, J. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias (7ma Edición).
 - Capítulo 3
- Levine, D.; Krehbiel, T.; Berenson, M. Estadística para administración (4ta Edición).
 - Capítulo 5



Variables aleatorias

II-1120 Estadística para Ingeniería Industrial I

Gracias por su atención

Steven García Goñi

steven.garciagoni@ucr.ac.cr

Dudas o correcciones requeridas pueden solicitarse al correo

