

Distribuciones de probabilidad discretas

Versión PDF

II-1120 Estadística para Ingeniería Industrial I

Steven García Goñi

steven.garciagoni@ucr.ac.cr

18 de mayo de 2026



Agenda

- Preguntas generadoras
- Repaso y analogía
- Algunas distribuciones discretas
 - Uniforme
 - Binomial
 - Binomial negativa
 - Hipergeométrica
 - Poisson
- Consideraciones finales
- Ejercicio integrador (minicaso)



Preguntas generadoras

- ¿Cuándo se utiliza cada tipo de distribución?
- ¿Cuáles son las características de una distribución de probabilidad discreta?
- ¿Cómo se calcula la probabilidad, sin importar el tipo de distribución?
- ¿Cómo utilizar las distribuciones de probabilidad para resolver problemas?
- ¿Cuál es la relación e importancia de cada distribución con el quehacer ingenieril?



Repaso



Distribuciones de probabilidad

- Se pueden considerar como **modelos matemáticos** que representan y simplifican la realidad de fenómenos aleatorios.
- En este contexto, es una representación teórica que formaliza ciertos aspectos de un **fenómeno observable**, permitiendo **describir, explicar y predecir** el comportamiento de variables aleatorias bajo algunos supuestos.



Distribuciones de probabilidad

- **Simplifican** la complejidad de la **realidad** al centrarse en ciertos aspectos relevantes del fenómeno aleatorio.
- Permiten **calcular probabilidades** de manera sistemática bajo supuestos explícitos.
- Sirven para predecir el **comportamiento futuro** de un experimento aleatorio si se mantienen las condiciones iniciales



¡Importante!

All models are wrong, **but some are useful** - *George E. P. Box*



Parámetros

- Los **parámetros** se emplean para describir el comportamiento de los datos.
- Todas las distribuciones se describen mediante **parámetros**.
- Los **parámetros** se estiman mediante **estimadores**.



Construcción de analogía

En esta clase utilizaremos una analogía porque lo importante **no es memorizar** una lista de distribuciones, sino **entender** las ideas que hay detrás de ellas.

Una vez que se comprenden estas distribuciones fundamentales, es mucho más fácil reconocer y trabajar con **otras distribuciones menos conocidas**.



Construcción de analogía

- En este sentido, los modelos estadísticos, y, en particular, las distribuciones de probabilidad, son como *prendas de ropa*.
- Para vestirse, las personas escogen prendas que se ajusten a sus cuerpos y gustos.
- En primer lugar, las personas escogen una prenda (**distribución**) que sea adecuada para la situación (**contexto**).
 - No vamos a una boda con la ropa del gimnasio, tampoco vamos a la piscina con ropa de gala.
- Luego, se prueba la talla (**parámetros**) de la prenda de ropa (**distribución**) que mejor se ajuste al cuerpo (**la realidad que se desea describir**).



Recuerde

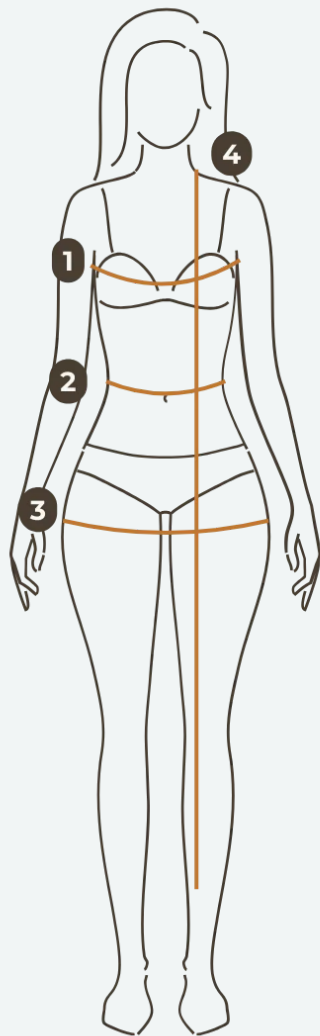


- Ojo, son las **distribuciones las que se ajustan a los datos** y nunca los datos a las distribuciones.
 - Cuide el uso del vocabulario técnico correcto.
- Entonces, si una distribución cualquiera NO se ajusta a un conjunto de datos, **es la distribución la que no "sirve"** como modelo, no los datos.
 - Nota: Esto bajo la consideración de que la forma en que se recolectaron los datos y la cantidad de los mismos son adecuados.
- ¿Podemos suponer que el pie (**datos**) está mal? ¿O escogimos mal el zapato (**distribución**)?



Construcción de analogía

Guía de tallas de **MUSCARI**



- 1 PECHO**
Se mide al rededor de la parte más pronunciada
- 2 CINTURA**
Se mide al rededor de la zona más estrecha del torso
- 3 CADERA**
Se mide al rededor de la zona más ancha de la cadera
- 4 LARGO**
Se mide desde el punto en que se cruzan el cuello y el hombro, dejando caer el metro hacia abajo

- Suponga que, para la situación/contexto se selecciona un vestido (**distribución**).
- Los **parámetros** son 1 Pecho, 2 Cintura, 3 Cadera y 4 Largo, que buscan aproximar las medidas del cuerpo. Por ejemplo, la página de MUSCARI (link en la imagen) recomienda que si la medida de la cadera es de 94-96 cm, la talla o parámetro es S.
- Entonces, esta prenda de ropa está descrita por estos cuatro parámetros.
- Estos parámetros se estiman mediante **estimadores**.



Resumen de la analogía

- En estadística, hay dos etapas conceptualmente distintas:
 - **Elegir el modelo:** Según el contexto, la naturaleza del experimento, las características de la variable, los supuestos probabilísticos, entre otros.
 - **Estimar los parámetros:** Una vez elegido el modelo, necesitamos encontrar qué valores de los parámetros lo hacen ajustarse a los datos.
- Es decir:
 - Primero escogemos el tipo de prenda que creemos adecuada para la situación: esto corresponde a elegir una distribución de probabilidad.
 - Luego debemos encontrar qué talla de esa prenda se ajusta mejor al cuerpo. En estadística, esto corresponde a estimar los parámetros del modelo mediante estimadores.



Cierre de la analogía

Las distribuciones de probabilidad **no son recetas para memorizar**, sino herramientas para modelar la realidad.

Quien ejerce la ingeniería no aplica modelos de forma mecánica. Más bien los selecciona y los ajusta a la realidad, como un sastre ajusta una prenda al cuerpo.



Cierre de la analogía

Fitting models to data is a bit like designing shirts to fit people. If you fit a shirt too closely to one particular person, it will fit other people poorly. Likewise, a model that fits a particular data set too well might not fit other data sets well. - Rahul Parsa

Por eso:

All models are wrong, but some are useful - George Box



Algunas distribuciones discretas



Aclaraciones importantes

- Se insiste sobre:
- Estas lecciones no tratan de que memorice las diferentes distribuciones de probabilidad, sino que aprenda, con base en las más comunes, cómo extrapolar estos conocimientos a otras distribuciones que quizá hoy no sean tan usadas, pero que en el futuro podrían serlo.



Distribución uniforme discreta

Parámetros

n = cantidad de eventos

Funciones

$$f(x|n) = \frac{1}{n}$$

$$F(x|n) = \sum_{i=1}^x \frac{1}{n} = \frac{x}{n}$$

Esperanza $E(x)$ y varianza $V(x)$

$$E(x|n) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(x|n) = \frac{n^2-1}{12}$$

- Esta distribución es de “calentamiento”. Por su sencillez de aplicación.
- Recuerde que $x|n$ es una expresión condicional, que se lee como x dado n .
- $x = 1, 2, \dots, n$



Uniforme discreta

¿Cuándo se usa?

No todas las prendas de ropa son adecuadas para todas las ocasiones/climas, sino que se escogen cuidadosamente en función del contexto, incluyendo sus tallas.

Este mismo razonamiento es el que se usa para seleccionar una distribución de probabilidad, según sus características.

Características

- Es una distribución simétrica.
- Todos sus eventos son equiprobables.
- Está descrita por la cantidad de eventos (n).
- Un ejemplo clásico es el lanzamiento de un dado.



Ejercicio de calentamiento

- Un decaedro es un dado con 10 caras, con cada cara de forma de cometa o deltoide. Suponga que cada cara está igualmente cargada.
- Obtenga
 - El parámetro de la distribución
 - $n = 10$
 - La probabilidad de cualquier evento
 - $P(x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$
 - La probabilidad de que salga un 1 o un 2
 - $P(1 \text{ ó } 2) = P(1) + P(2) = \frac{2}{10}$
 - La esperanza y varianza matemática
 - $E(x) = 5.5$ y $V(x) = 8.25$



Ensayo Bernoulli

- Cada ensayo produce un resultado que se puede clasificar como **éxito o fracaso**.
 - Éxito es el evento de interés y no necesariamente algo positivo. El éxito puede ser: un diagnóstico positivo de enfermedad, el daño de una pieza, ganarse la lotería, etc
- La probabilidad de éxito se denota con p y la de fracaso con q .
 - Recuerde las propiedades de la probabilidad $q = 1 - p$
- Los ensayos son independientes.
 - Esto implica que la probabilidad de éxito p es la misma en todos los ensayos.
- Una secuencia de ensayos Bernoulli independientes da origen a la distribución binomial.



Recordatorio

- En la clase de Probabilidad Básica aprendimos que hay tres tipos de enfoques para obtener probabilidades:
 - Clásica a priori
 - Clásica empírica
 - Subjetiva
- En este sentido, la probabilidad de éxito se puede asignar de cualquiera de las tres formas anteriores.
- De ser necesario, repase estos conceptos



Distribución binomial

Parámetros

n = cantidad de intentos

p = probabilidad de éxito

Funciones

$$f(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$F(x|n, p) = \sum_{i=0}^x f(i|n, p)$$

Esperanza $E(x)$ y varianza $V(x)$

$$E(x|n, p) = n \cdot p$$

$$V(x|n, p) = n \cdot p \cdot q$$

- Esta distribución se basa en ensayos de Bernoulli.
- $x = 0, 1, 2, \dots, n$
- $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$



Distribución binomial

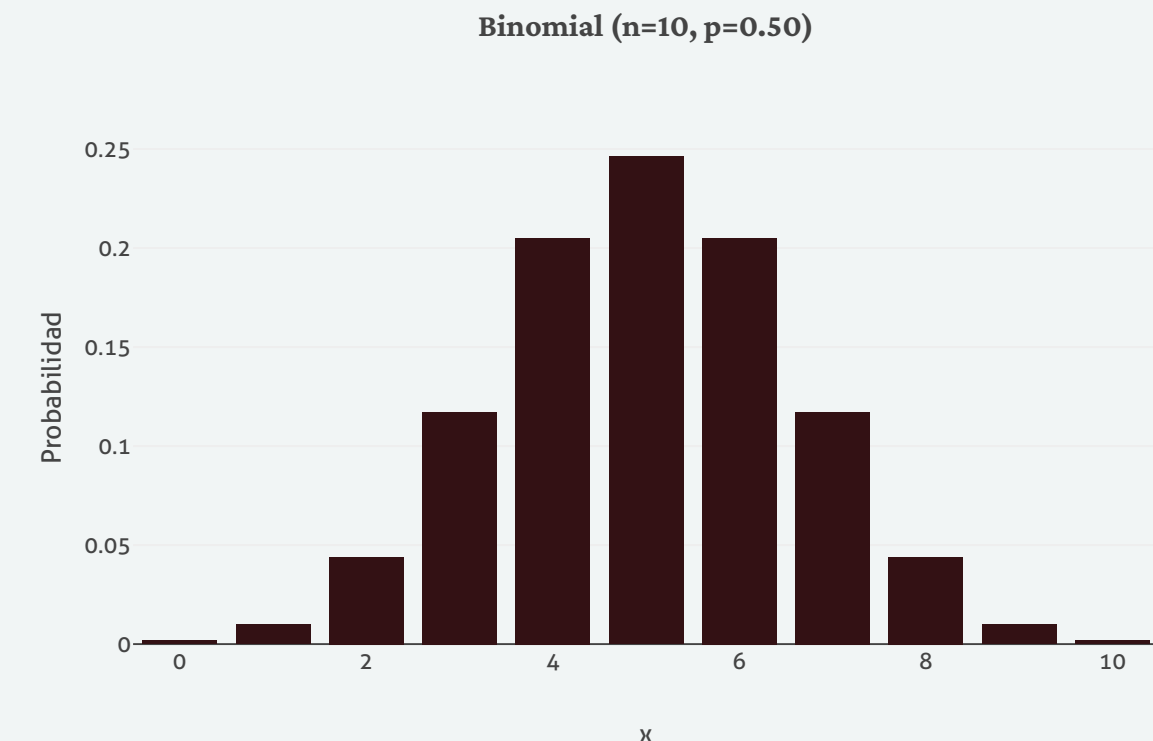
Características:

- Consiste en n ensayos Bernoulli independientes.
- Cada ensayo puede dar dos resultados posibles (dicotómico o binario) que se suelen denotar como éxito y fracaso.
- Los ensayos son independientes, es decir, el resultado anterior no influye en cualquier otro ensayo.
- La variable aleatoria x denota el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, con una probabilidad p .

Binomial interactiva

Seleccione una distribución: Binomial

n: 10
p: 0.5



Creado por Steven García Goñi · Para la Escuela de Ingeniería Industrial de la Universidad de Costa Rica ·
Actualizado: Enero 2026



Ejercicio 01

- Recuerde el ejemplo de Diabetes no controlada. Determine la probabilidad de ser hipertenso:

$$p = \frac{8}{16} = 0.5$$

- Con esto ya tenemos un parámetro, nos falta otro. Recuerde que n es la cantidad de experimentos Bernoulli, por lo general esto es una decisión del experimentador/analista.
- Para resolver estos ejercicios puede recurrir a los gráficos interactivos disponibles a lo largo de esta presentación y en este [enlace](#), además, se recomienda que utilice esta [aplicación](#) de Matt Bognar, Ph.D.

Hipertensión
0
0
0
1
1
1
1
0
0
0
0
1
1
0
1
1



Ejercicio 01

- Bien, ya conocemos p .
- Ahora, en una clínica odontológica especializada en diabéticos, interesa conocer si un paciente es hipertenso o no, pues al momento de hacer una extracción dental se deben tomar precauciones para evitar complicaciones como sangrado excesivo.
- La visita de pacientes es independiente, es decir, que un paciente hipertenso asista no influye sobre la asistencia de otros pacientes hipertensos.



Ejercicio 01

- Si en un día hay espacio para 12 pacientes, determine:
- La probabilidad que 8 sean hipertensos.
— 0.12085
- La probabilidad que máximo 3 sean hipertensos
— 0.073
- La probabilidad que al menos la mitad sean hipertensos
— 0.61279



Distribución binomial negativa

Parámetros

r = cantidad de éxitos

p = probabilidad de éxito

Funciones

$$f(x|r, p) = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x$$

$$F(x|r, p) = \sum_{i=0}^x f(i|r, p)$$

Esperanza $E(x)$ y varianza $V(x)$

$$E(x|r, p) = \frac{r \cdot q}{p}$$

$$V(x|r, p) = \frac{r \cdot q}{p^2}$$

- Esta distribución también se basa en ensayos de Bernoulli. Existen dos parametrizaciones comunes de la distribución binomial negativa. Aquí utilizamos la que modela el número de fracasos antes del r -ésimo éxito.
- $x = 0, 1, 2, \dots$



Distribución binomial negativa

Características:

- El experimento consiste en una serie de ensayos independientes.
- Cada ensayo puede dar como resultado éxito o fracaso. La probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro
- El experimento continua (se siguen realizando ensayos) hasta que un total de r éxitos sean observados. Siendo r un entero positivo.
- Se llama binomial negativa, porque al contrario de la binomial, el **número de éxitos es fijo** y el **número de ensayos es aleatorio**.

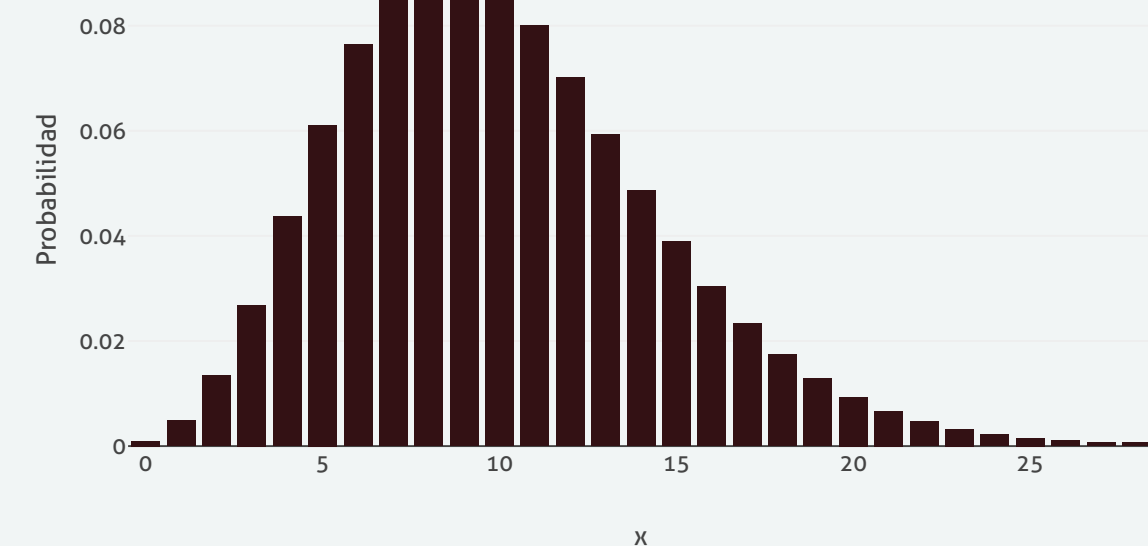
Binomial negativa interactiva

Seleccione una distribución: Binomial negativa ▾

Número de éxitos (r): 10

p : 0.5

Binomial Negativa ($r=10, p=0.50$)



Creado por Steven García Goñi · Para la Escuela de Ingeniería Industrial de la Universidad de Costa Rica ·
Actualizado: Enero 2026



¿Qué significa esto?

- La variable aleatoria x es el número de fracasos **antes** del r — *esimo* éxito.
- Si $r = 2$, x sería la cantidad de fracasos **antes** de que ocurra el éxito número 2.

— $x = 5$:       

— $x = 6$:        

— $x = 3$:     

Note que NO importa donde/cuando sucede el primer éxito.

Lo que si importa es cuántos fracasos suceden antes de que ocurra el segundo éxito (dado que $r = 2$), note además que el último siempre es un éxito.



Ejercicio 02

- Sigamos con el ejemplo anterior, recordemos que ya se estimó $p=0.5$. Ahora, al centro de salud, le interesa conocer:
 - La probabilidad de que 10 pacientes sean atendidos antes de que 4 sean hipertensos. Es decir, la probabilidad de que hayan 6 fracasos, antes de encontrar 4 éxitos.
 - 0.08203
- La probabilidad de que hayan 4 fracasos o menos, antes de encontrar 1 persona hipertensa
 - 0.96875



Distribución hipergeométrica

Parámetros

- N = tamaño de la población
- M = cantidad de éxitos en N
- n = tamaño de la muestra

Funciones

$$f(x|n, M, N) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$F(x|n, M, N) = \sum_{i=0}^x f(i|n, M, N)$$

Esperanza $E(x)$ y varianza $V(x)$

$$E(x|n, M, N) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$V(x|n, M, N) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

- $x = 0, 1, 2, \dots, n$
- $x \leq M$ y $n - x \leq N - M$



Distribución hipergeométrica

Características:

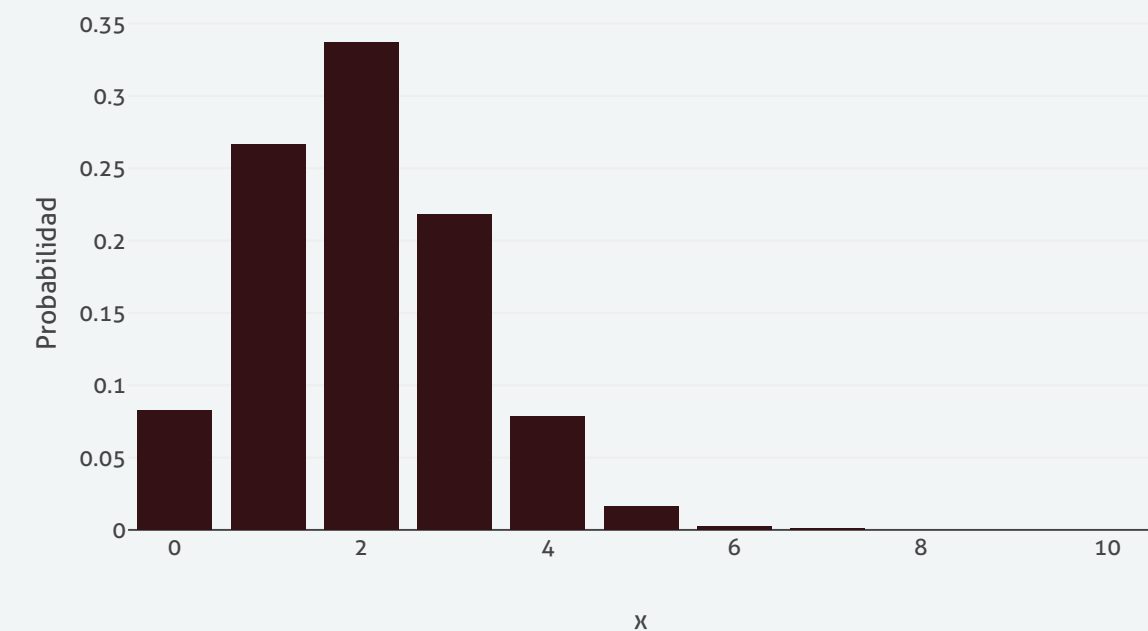
- El conjunto o población a muestrear, que es finito, se compone de N individuos. Cada individuo puede ser caracterizado como éxito o falla y hay M éxitos en la población.
- Se selecciona una muestra de n individuos **sin reemplazo** de tal modo que cada subconjunto de tamaño n es igualmente probable de ser seleccionado.
- La variable de interés x es el número de éxitos en la muestra. La distribución depende de los parámetros n , M y N .

Hipergeométrica interactiva

Seleccione una distribución: Hipergeométrica

Tamaño total (N): 50
Éxitos en la población (K): 10
Muestra (n): 10

Hipergeométrica (N=50, K=10, n=10)



Creado por Steven García Goñi · Para la Escuela de Ingeniería Industrial de la Universidad de Costa Rica ·
Actualizado: Enero 2026



Ejercicio 03

- Siguiendo con el ejemplo de la hipertensión. Recuerde que
 - $N = 16$
 - $M = 8$
 - La persona puede decidir sobre usar un valor de n particular. Supongamos $n = 4$.
- Calcule la probabilidad que en la muestra haya 3 o menos hipertensos.
 - 0.96154



Distribución Poisson

Parámetros

λ = promedio de eventos

Funciones

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$F(x|\lambda) = \sum_{i=0}^x f(i|\lambda)$$

Esperanza $E(x)$ y varianza $V(x)$

$$E(x|\lambda) = \lambda$$

$$V(x|\lambda) = \lambda$$

- $x = 0, 1, 2, \dots$
- $\lambda > 0$
- [Video sobre cómo pronunciar Possion \(puá-son\)](#)

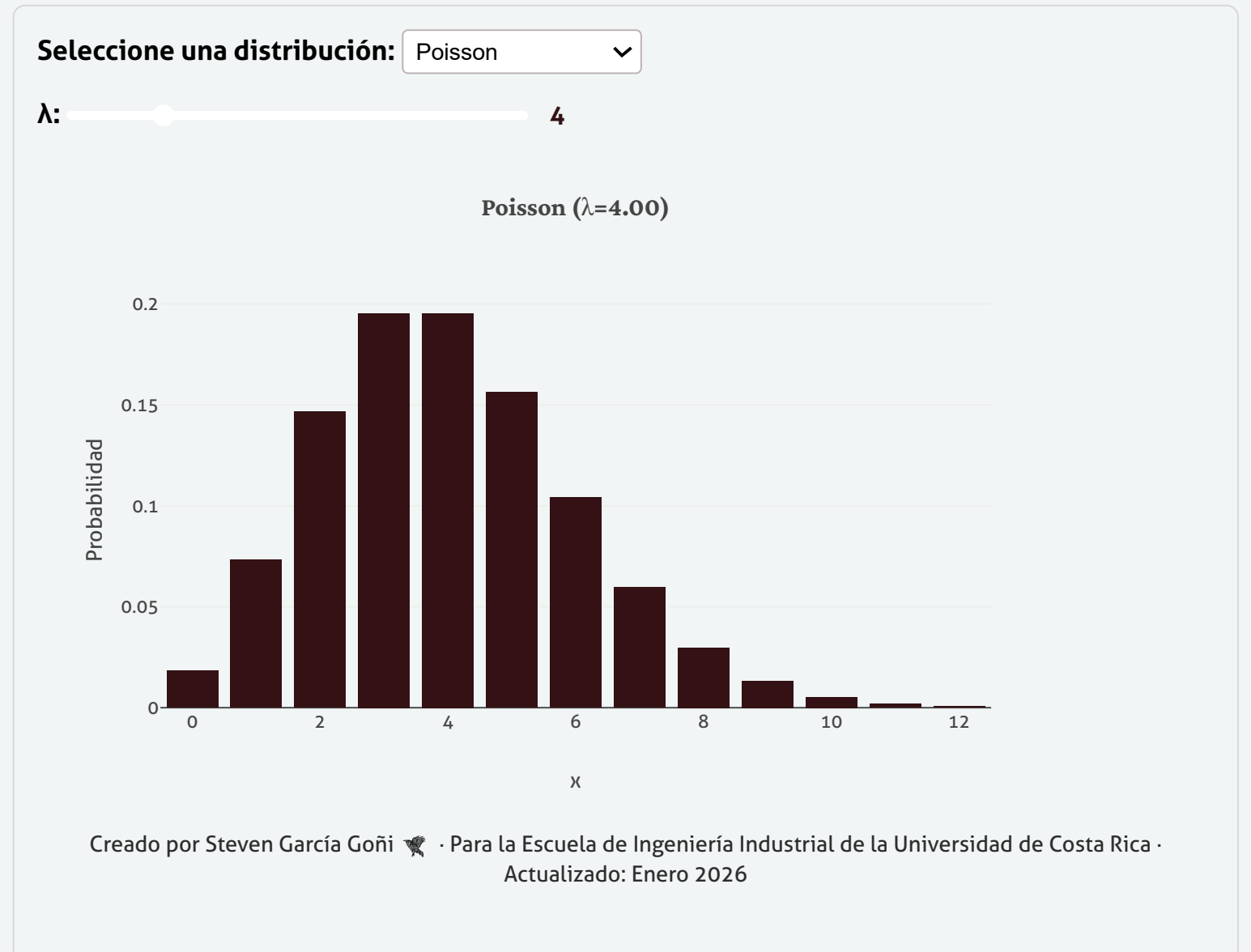


Distribución Poisson

Características:

- Los eventos ocurren independientemente en intervalos disjuntos (incrementos independientes).
- El número esperado de eventos en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo (tasa constante λ).
- Se describen mediante una tasa constante de ocurrencia en el tiempo o espacio (variable continua).
- x es el número de eventos observados en un intervalo.
 - Ejemplos: llamadas a un call center, defectos por metro de tela, accidentes por día.

Poisson interactiva



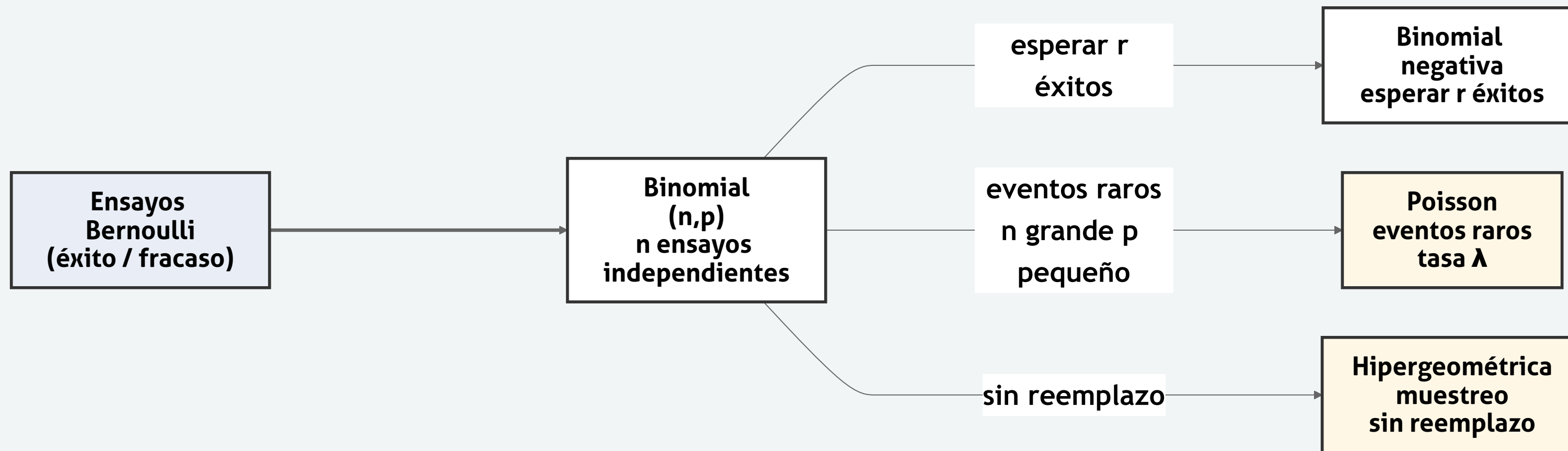
Ejercicio 04

- Al centro de salud, cada hora llegan los consultantes con hipertensión que se muestran en el cuadro a la derecha.
- ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban 4 pacientes hipertensos en una hora?
 - Primero hay que encontrar $\lambda = E(x) = 2.93$
 - $P(x = 4) = 0.16397$
- ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de 4 pacientes hipertensos en una hora?
 - $P(x > 4) = 0.17311$

Pacientes
3
2
3
4
4
2
4
2
0
3
3
1
6
4
3



Diagrama de relaciones entre distribuciones



Para ver el diagrama en pantalla completa diríjase a este [enlace](#).

Relación conceptual entre distribuciones discretas



Consideraciones finales

- Estas no son las únicas distribuciones que existen
- Siguiendo con la analogía de las prendas de ropa, acabamos de aprender las clásicas: camisetas, blusas, camisas, pantalones, etc.
- No obstante, tomemos en cuenta que **así como existen otras prendas de ropa** (o variaciones de las anteriores), por ejemplo pantalones con campana, ajustados, cortos, largos, etc; enterizos, overalls, etc... **También existen otras distribuciones discretas que pueden ser más adecuadas a determinadas situaciones** o inclusive ajustarse mejor al conjunto de datos.



Consideraciones finales

- En este sentido, ésta cátedra le recomienda **no depender de aplicaciones o software para calcular probabilidades** en las distribuciones clásicas.
- Sino que **comprenda la base procedimental de cualquier distribución discreta** para que pueda expandir o generalizar dicho conocimiento a otras distribuciones con mayor grado de especialización.
- Nota: Esto no implica que se desaconseje el uso de la tecnología, solo se le insta a no depender de ello.



Consideraciones finales

- Existen pruebas estadísticas para determinar cual es la distribución que mejor se ajusta a los datos. No obstante, este tema: Bondad de ajuste, queda fuera del alcance de este curso.
- Básicamente, lo que hacen esas pruebas es probar simultáneamente muchas prendas y tallas de ropa y escoger la mejor.



Ejercicio integrador

- A un restaurante muy famoso llegan una determinada cantidad de clientes cada 30 minutos. A esos clientes se les pide llenar una encuesta de satisfacción a cambio de una regalía, la cantidad de clientes que aceptan (1) y rechazan (0) se registran en una hoja de cálculo. La decisión de completar la encuesta es independiente.
- Esta regalía se compone de 10 galletas caseras, que pueden ser galletas de chispas de chocolate (0) y galletas red velvet (1). La producción de galletas también se registra en una hoja de cálculo en este [Excel](#).



Ejercicio integrador

- Determine:
 - La probabilidad de que en un momento determinado del día hayan 10 clientes en el restaurante famoso.
 - La probabilidad de que de 15 personas, 10 llenen la encuesta de satisfacción.
 - La probabilidad de que 3 o menos galletas sean Red Velvet
 - La probabilidad de que haya que preguntarle a más de 5 personas para obtener 3 respuestas en la encuesta de satisfacción.
 - La cantidad de galletas red velvet que tiene cada regalía en promedio.
 - El promedio de la cantidad de rechazos que debe haber para que se completen 30 encuestas de satisfacción.
 - Obtenga el promedio de personas que aceptan responder a la encuesta por día, considerando una jornada de trabajo de 8 horas e independencia.
- A modo de práctica para el examen, plantee otros ejercicios y trate de resolverlos.



Bibliografía

- Walpole, R.; Myers, R.; Myers, S. y Ye, K. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias (9na Edición).
— Capítulo 5
- Devore, J. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias (7ma Edición).
— Capítulo 3
- Montgomery, D; Runger, G. Applied Statistics and Probabilty for Engineers (5th Edition)
— Capítulo 3



Distribuciones de probabilidad discretas
II-1120 Estadística para Ingeniería Industrial I

Gracias por su atención
Steven García Goñi

steven.garciagoni@ucr.ac.cr

Dudas o correcciones requeridas pueden solicitarse al correo

